Ejercicios de Matemáticas I - Relación 2

1. Una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$ e *impar* si $f(-x) = -f(x)$.

   a) Estudia si la suma, el producto y la composición de funciones pares o impares es una función par o impar. Considera todos los casos posibles.

   b) Prueba que toda función puede escribirse de forma única como suma de una función par y una función impar.

2. Prueba que la función $f : [1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \geqslant 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f.

3. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2}}$.

4. Compara $a^{\ln b}$ con $b^{\ln a}$.

5. Simplifica las expresiones $a^{\ln(\ln a)/\ln a}$, $\quad \log_a(\log_a(a^{a^x}))$.

6. Calcula x sabiendo que:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

7. Prueba las igualdades siguientes.

$$\begin{aligned}
\cos(\operatorname{arc\,tg} x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\tan(\operatorname{arc\,sen} x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[\\
\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,sen} x &= \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1] \\
\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x) &= \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

8. Dado $x \in \mathbb{R}$ prueba que hay un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = x$.

   Sugerencia. Lo que tienes que hacer es calcular t. La sustitución $e^t = u$ te permitirá calcular u.